MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Clasa a X–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.

a) Arătați că $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați partea întreagă a numărului $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2025}}$.

Subiectul 2.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases}3^x-\dfrac{1}{y^2}=25\\ \log_9 x-\log_2 y=1\end{cases}$.

b) Se consideră o mulțime M de numere complexe care satisface proprietățile:

(1) $i\in M$.

(2) $x\in M\cap\mathbb{R}\Rightarrow(\cos 2x+i\cdot\sin 2x)\in M$.

(3) $(\cos x+i\cdot\sin x)\in M\Rightarrow x\in M$.

Arătați că $\{-1,0,1\}\subset M$.

Subiectul 3.

a) Se consideră trei puncte *A, B, C,* a căror afixe sunt $z_A=1+i$, $z_B=-1+2i$. $z_C=-1-3i$ și un punct $M\in(BC)$, astfel încât $\dfrac{BM}{MC}=4$. Aflați afixul punctului M și arătați că:

$AB^2\cdot MC^2+AC^2\cdot MB^2=AM^2\cdot BC^2$.

b) Fie $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ și $z_1+z_2+z_3=1$. Calculați $\dfrac{1}{z_1^{1011}}+\dfrac{1}{z_2^{1011}}+\dfrac{1}{z_3^{1011}}$.

Subiectul 4.

Emilia alege un număr natural a, știind că apoi, Alin alege la întâmplare un număr real strict pozitiv x. Dacă $A=10-2\log_2 x$ sau $B=\log_2(16x)$ este cel puțin egal cu a, atunci Alin îi va face Emiliei un cadou în valoare de 3^a RON. Ce număr trebuie să aleagă Emilia pentru a primi, evident, un cadou cât mai valoros și ce valoare are cadoul?

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.