



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Clasa a XI-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Fie mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \ln a & 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in (0; +\infty) \right\}$.

- Demonstrați că produsul oricăror două matrice din mulțimea \mathcal{M} este o matrice din mulțimea \mathcal{M} .
- Determinați perechile de numere naturale nenule (m, n) , cu $m > n$, astfel încât pentru matricele $M(m)$ și $M(n)$ din mulțimea \mathcal{M} , să aibă loc relația:

$$\det(M(m) \cdot M(n)) - \det(M(m)) - \det(M(n)) = 2024.$$

- Determinați matricele $M(a) \in \mathcal{M}$, cu $a \in \mathbb{N}^*$, pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $M^n(a) = M(4096)$.

Subiectul 2.

Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$.

- Demonstrați că orice matrice din mulțimea M este inversabilă și că inversa aparține mulțimii M ;
- Demonstrați că soluția ecuației $A(a) \cdot X = A(b)$, unde $X \in M_3(\mathbb{R})$ și $A(a), A(b) \in M$, este element al mulțimii M ;
- Calculați $[A(2)]^{2024}$.

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3, & x \leq -1 \\ ax^2 + ax - 1, & x > -1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$.

- Demonstrați că funcția f este continuă, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.
- Determinați numărul real nenul a , astfel încât funcția f să fie derivabilă în $x_0 = -1$.
- Demonstrați că funcția f are o singură rădăcină în intervalul $I = [0; 2]$, oricare ar fi $a > \frac{1}{6}$.

Subiectul 4.

Transpusă într-un sistem de axe ortogonale, o șosea e situată pe o curbă de ecuație $y = \sqrt{x+1}$ și unește orașele A, B, C și D care au abscisele 0, 3, a și b, $0 < a < b$. Prin orașul C este construită o autostradă care este tangentă la șosea și este paralelă cu dreapta determinată de orașele A și B.

- Aflați coordonatele orașului C;
- Determinați abscisa orașului D, știind că aria suprafeței de teren cuprinsă între orașele A, B și D este de $3(u.m)^2$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore;

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.