MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Clasa a XI–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.

O matrice de forma $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se numește cod.

a) Arătați că produsul a două coduri este un cod.

b) Dacă X este un cod, arătați că X^{-1} este un cod.

c) Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

și definim șirurile de coduri $(X_n)_{n\geq 1}$, astfel încât: $X_1 = I_3$; $X_{n+1} \in \{X_n + A, X_n + B, X_n + C\}$, pentru $n \geq 1$.

Există un șir $(X_n)_{n\geq 1}$ care conține codul $\begin{pmatrix} 1 & 2022 & 2023 \\ 0 & 1 & 2024 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? Dar codul $\begin{pmatrix} 1 & 2023 & 2024 \\ 0 & 1 & 2025 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Subiectul 2.

Fie matricile $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.

b) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = O_2$, atunci $A^2 = O_2$.

c) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $X^{2024} - X^{2023} = O_2$, demonstrați că $X^3 - X^2 = O_2$.

Subiectul 3.

O funcție $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ se numește *interesantă* dacă $f(x) \cdot f\big(f(x)\big) = 1, \ \forall x \in (0, \infty)$.
Notăm cu $\mathcal{F}$ mulțimea *funcțiilor interesante*.

a) Arătați că $\mathcal{F}$ este mulțime nevidă.

b) Determinați funcțiile *interesante* surjective.

c) Fie $f \in \mathcal{F}$ o funcție continuă. Dacă $f(2024) = \frac{1}{2024}$, determinați $f(2023)$.

Subiectul 4.

Un fenomen fizic, modelat de funcția $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ se numește $a\ echilibrat$, $a > 0$ dacă există limita: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+a)}{f(x)}$ și este egală cu 1.

a) Arătați că fenomenul modelat de funcția $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{3x+2} - \sqrt{3x}$ este $1\ echilibrat$.

b) Există $a > 0$ astfel încât fenomenul fizic modelat de funcția $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty), f(x) = 3^x - 2^x$ să fie $a\ echilibrat$?

c) Un fenomen fizic, modelat de o funcție $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, monoton crescătoare este $1\ echilibrat$. Arătați că:

1. fenomenul este $n\ echilibrat$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
2. fenomenul este $a\ echilibrat$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.

<u>Notă</u>:
Timp de lucru 3 ore;
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.